

RÉALISATION

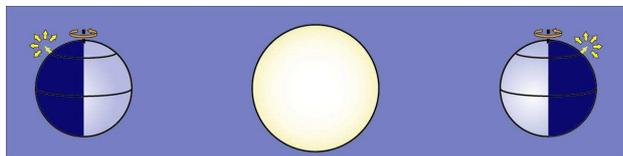
Les cartes tournantes du ciel

Pierre Causeret, pierre.causeret@wanadoo.fr

Résumé : Comment peut-on représenter dans ces pages la voûte céleste ? Le problème n'est pas simple puisqu'il s'agit de mettre à plat une demi-sphère qui change tout le temps d'aspect suivant la date et l'heure.

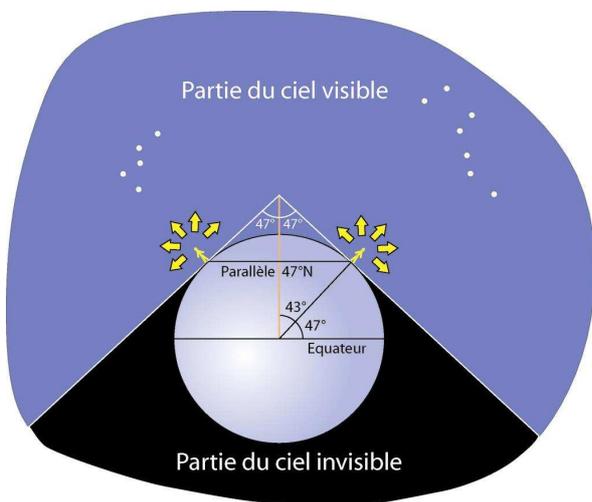
La partie du ciel à représenter

Si nous voulons réaliser une carte utilisable à tout moment, il faut représenter toute la partie du ciel visible depuis un lieu donné au cours de la nuit et de l'année.



Le ciel visible change au cours de la nuit et de l'année

A une latitude moyenne en France, 47° nord, la partie invisible est située dans un cône dont l'angle au sommet vaut 94° ($2 \times 47^\circ$). Cela ne fait que 16% de la sphère céleste (le calcul est fait à la page 32). Il reste donc 84% à représenter...



Partie du ciel visible depuis la latitude de 47° nord

Si vous habitez au Pôle Nord, seul l'hémisphère céleste nord vous sera accessible. A l'équateur, vous pourrez voir toute la sphère céleste.

On peut montrer que pour un habitant de l'hémisphère nord situé à la latitude φ , les étoiles visibles sont celles qui sont situées à une déclinaison supérieure à $\varphi - 90^\circ$.

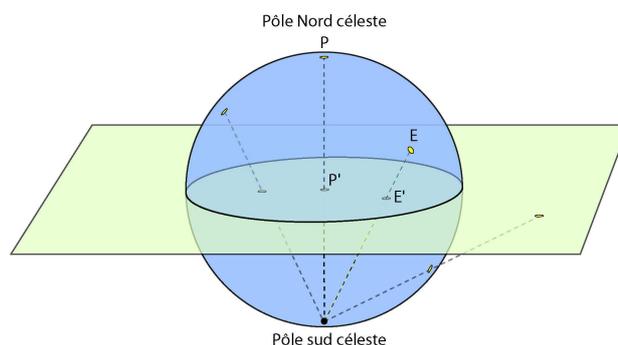
Plus on descend vers le sud, plus la partie visible de la sphère céleste est importante et plus il est difficile de la représenter à plat avec un minimum de déformation. La carte tournante proposée à la fin de cet article est utilisable entre 42° et 52° de latitude nord. Il est beaucoup plus difficile de concevoir une carte pour les Antilles ou la Réunion.

Lieu	Latitude	% visible
Équateur	0°	100%
Tropique	23°	96%
Alger	37°	90%
Marseille	$43,3^\circ$	86%
Lille	$50,6^\circ$	82%
Cercle polaire	$66,6^\circ$	70%
Pôle Nord	90°	50%

Pourcentage de la sphère céleste visible depuis un lieu donné.

Quelques projections utilisées

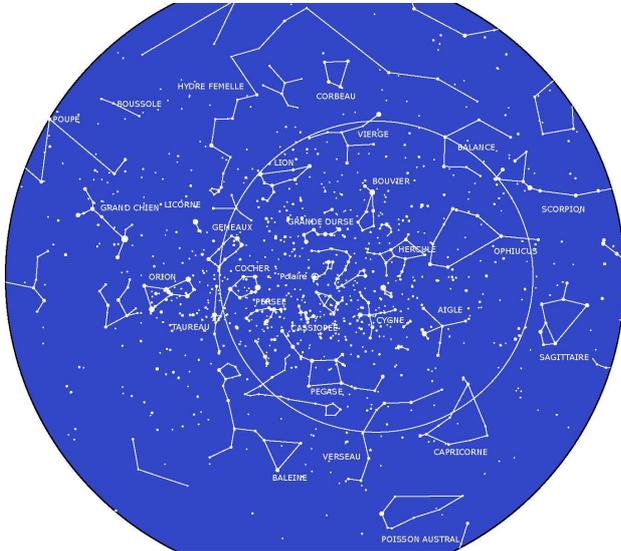
Le plus simple est de projeter sur le plan de l'équateur. La projection stéréographique, déjà décrite par Ptolémée, a beaucoup été utilisée, en particulier pour les astrolabes.



Projection stéréographique à partir du Pôle Sud sur le plan de l'équateur (en vert).

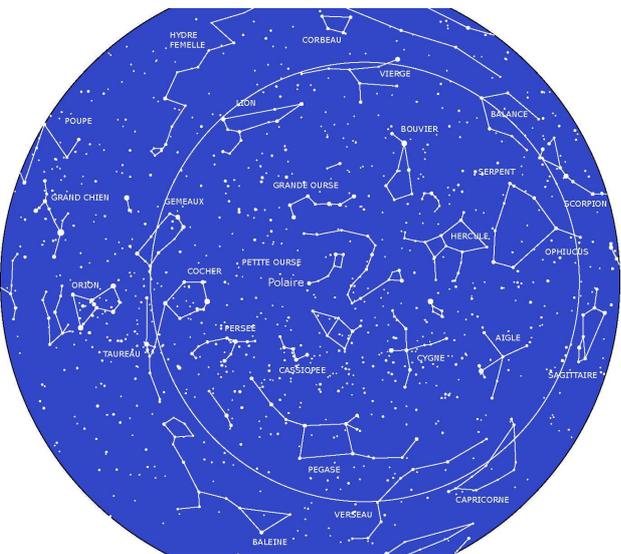
Elle a deux principaux avantages : elle transforme tout cercle de la sphère céleste en un cercle (ou éventuellement une droite, ce qui est plus facile à tracer).

et surtout, elle conserve les angles, c'est ce qu'on appelle une projection conforme. Ainsi, les constellations conservent leur forme. Son principal inconvénient : plus on s'éloigne du Pôle Nord, plus l'image d'une constellation est agrandie (dans une projection classique à partir du Pôle Sud). Et les cartes deviennent vite très grandes.



Carte du ciel en projection stéréographique en vue du Pôle Sud (ainsi les constellations apparaissent dans le sens où on les voit et non inversées). Le Sagittaire (à droite) a la même forme que dans le ciel mais il est trop grand comparé à Cassiopee ou au Bouvier par exemple.

Pour que les cartes gardent une taille raisonnable, on modifie la projection pour que la distance sur la carte d'une étoile à la Polaire soit proportionnelle à l'angle qui les sépare sur la voûte céleste. C'est ce qu'on appelle une projection azimutale équidistante. Son principal inconvénient est que les constellations éloignées de la Polaire sont fortement déformées : elles apparaissent élargies en ascension droite.



Carte du ciel en projection azimutale équidistante. Le Sagittaire (à droite) est complètement déformé ici.

Les formules (tous les angles sont en degrés)

Soit une étoile E d'ascension droite α et de déclinaison δ (en degrés). On appelle E' l'étoile projetée (voir la figure en bas de la page précédente). Les coordonnées polaires de E' sont r (la distance P'E') et θ , l'angle que fait (P' γ) avec (P'E'), γ désignant le point vernal.

En projection stéréographique :

$$\theta = \alpha \quad \text{et} \quad r = r_e \times \tan(45^\circ - \delta/2)$$

En projection équidistante :

$$\theta = \alpha \quad \text{et} \quad r = r_e \times (1 - \delta/90)$$

(r_e est le rayon de l'équateur sur la carte)

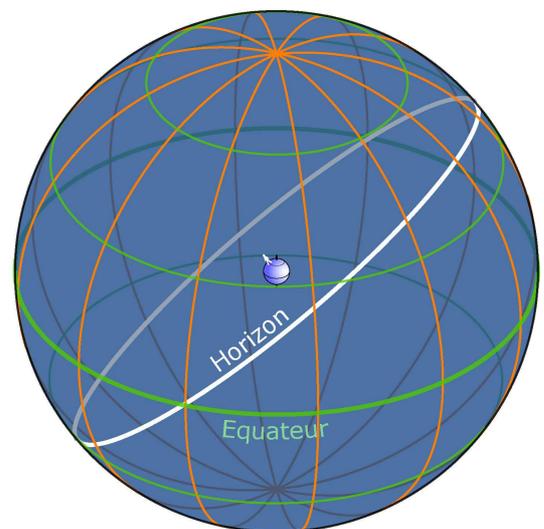
Les formules sont explicitées p 32

Que peut-on noter sur une carte du ciel ?

En plus des étoiles et des traits les reliant pour former les astérismes, on trace habituellement l'équateur et l'écliptique. Il est possible de noter les positions du Soleil à intervalles réguliers sur cet écliptique. C'est ce que j'ai fait sur la carte proposée à la fin de cet article. On peut aussi graduer l'écliptique en dates. Mais on ne peut évidemment pas y placer les planètes (du grec, planêtês, errant), elles changent continuellement de place. Sur les astrolabes, on avait aussi l'habitude de tracer les tropiques sous la forme de deux cercles tangents à l'écliptique.

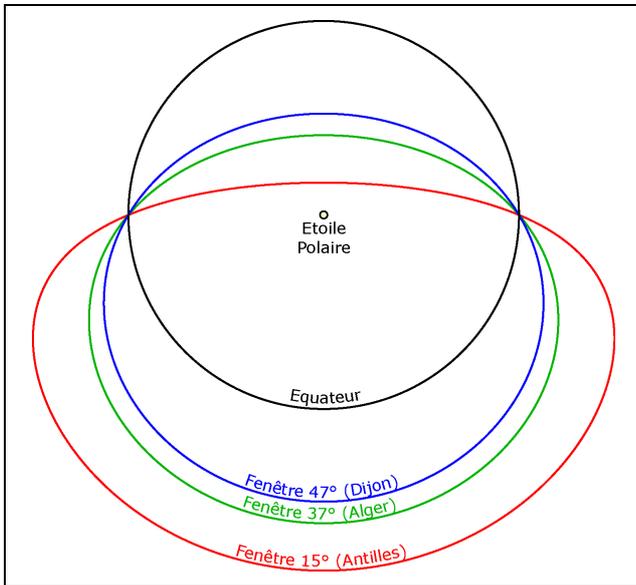
La fenêtre horizon

L'horizon d'un observateur quelconque est aussi un grand cercle de la sphère céleste. Celui-ci dépend de la latitude de l'observateur et il se déplace sur la sphère céleste au cours de la rotation de la Terre.



La Terre avec un observateur à 47° de latitude nord, la sphère céleste, l'équateur céleste en vert et l'horizon de l'observateur en blanc.

Si on projette ce cercle horizon sur le plan équatorial en projection stéréographique, on obtiendra encore un cercle. C'est ce que l'on trouve sur les tympanans des astrolabes. En projection équidistante, on trouve une forme ressemblant vaguement à un ovale.

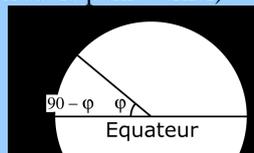


Horizons en projection équidistante pour différentes latitudes. Le cercle équateur correspond à l'horizon du Pôle Nord. Plus on s'approche de l'équateur, plus la forme de l'horizon est allongée.

Une méthode pour calculer la forme de l'horizon (tous les angles sont en degrés)

L'horizon projeté doit être tracé point par point. Un point M du cercle équateur a des coordonnées de la forme : $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $z = 0$, t variant de 0 à 360° (xOy est le plan de l'équateur, x est le point vernal).

On passe du cercle équateur au cercle horizon sur la sphère céleste par une rotation d'angle $90^\circ - \varphi$ autour de (Ox), φ étant la latitude (voir aussi la figure du bas de la page précédente).



Les formules de rotation donnent pour les coordonnées de M', image de M et donc point du cercle horizon :

$$\begin{aligned} x' &= r \cos t \\ y' &= r \sin t \sin \varphi \\ z' &= r \sin t \cos \varphi \end{aligned}$$

On en tire les relations suivantes avec les coordonnées équatoriales α , δ de M' :

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= y'/x' = \tan t \sin \varphi \\ \sin \delta &= z'/r = \sin t \cos \varphi \end{aligned}$$

On détermine ainsi α et δ .

On applique ensuite les formules de l'encadré précédent

$$\theta = \alpha \quad \text{et} \quad r = r_e \times (1 - \delta/90)$$

et on trouve les coordonnées du point projeté.

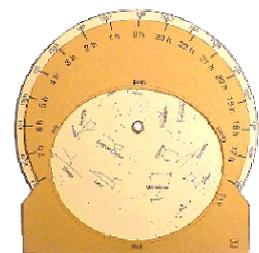
En faisant varier t de 0 à 360°, on obtient autant de points que l'on veut pour la projection de l'horizon.

Principe de la carte tournante

Une carte tournante permet de connaître le ciel visible un jour donné à une heure donnée. Pour cela, on projette les étoiles et l'horizon sur le plan de l'équateur (voir la figure du bas de la page 27). Les étoiles sont fixes dans ce plan. Quand la Terre tourne sur elle-même, le cercle horizon projeté tourne autour de la Polaire. On peut aussi considérer que l'horizon est fixe et que le ciel tourne autour de la Polaire, cela revient exactement au même. Les deux types de cartes tournantes existent. Sur certaines, l'horizon est dessiné sur un transparent qui tourne. Sur d'autres, l'horizon est découpé dans un cache et ce sont les étoiles qui tournent. Dans les deux cas, le centre de rotation est le Pôle Nord céleste, donc à peu de choses près l'étoile Polaire.

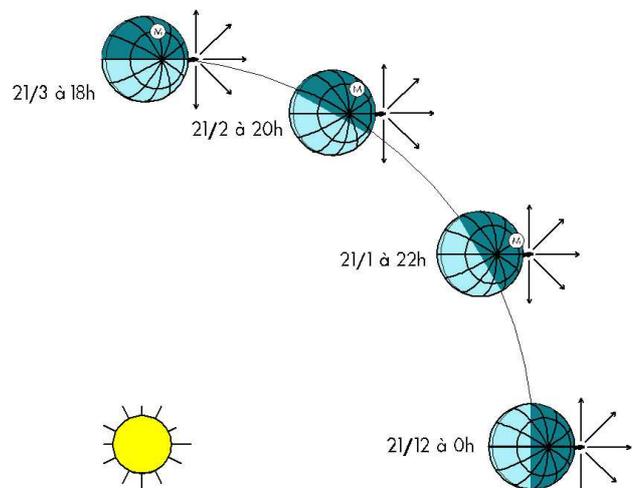


Carte à étoiles fixes et horizon tournant



Carte à horizon fixe et ciel qui tourne

Le réglage de la carte doit se faire en fonction de l'heure et de la date. Sur le schéma suivant, on a noté les méridiens terrestres toutes les deux heures. "M" désigne le méridien de minuit, à l'opposé du Soleil. On peut vérifier que le ciel visible le 21 décembre à minuit par le personnage est le même que le ciel visible le 21 janvier à 22 heures ou le 21 février à 20 h. Si on avance d'un mois et on recule de deux heures, on retrouve approximativement le même ciel.



Le ciel du 21/12 à 0 h est le même que le ciel du 21/01 à 22 h ou que celui du 21/02 à 20 h...

Fabrication

Pour réaliser la carte proposée, il vous suffit de photocopier les deux pages suivantes sur papier épais ou sur bristol. Si vous préférez la couleur ou si vous voulez un horizon tournant sur transparent, d'autres modèles prêts à être imprimés sont disponibles sur le site du CLEA.

Il faudra prévoir une paire de ciseaux, une attache parisienne (ou un bouton pression) et du ruban adhésif.

Utilisation de la carte du ciel

- Placer la date en face de l'heure.
- Mettre la carte au-dessus de sa tête : on voit alors le ciel visible ce jour-là à cette heure-là.
- Attention, les heures sont les heures au Soleil. Dans le mode d'emploi au dos de la carte, il est précisé qu'il faut retrancher 2 heures (ou 1 en heure d'hiver) à l'heure de la montre. Pour être exact, il faudrait aussi tenir compte du décalage en longitude avec Greenwich et de l'équation du temps. Mais pour l'utilisation que l'on en fait, cette petite erreur a peu d'importance.
- Quand on regarde la carte, on voit le nord en haut et l'ouest à droite. Certaines personnes croient qu'il y a une erreur. Mais ce n'est pas une carte terrestre vue du dessus mais une carte du ciel vu de dessous, ce qui inverse les points cardinaux.

Quelques remarques sur la carte du ciel

- Les noms en minuscule sont des noms d'étoiles, les noms en majuscule sont des noms de constellations.
- La position du Soleil est notée pour le 1er et le 15 de chaque mois.
- Les graduations extérieures correspondent au 1er, 8, 15 et 22 de chaque mois.

Un questionnaire

Ce questionnaire avait été réalisé pour le stand du CLEA au salon des jeux mathématiques à St Sulpice à Paris. Il est très sommaire mais peut vous donner des idées.

1. Régler la carte pour le 1er juin à 22 heures.
 - a. Quelle étoile brillante voit-on au sud ?
 - b. Où est située la constellation de l'Aigle ?
 - c. Où est située celle de Cassiopée ?
2. Placer la constellation d'Orion au sud.

- a. À quelle date peut-on voir Orion au sud à 20 h ?
 - b. Peut-on voir en juin la constellation d'Orion ?
3. Tourner la carte du ciel.
 - a. La Grande Ourse peut-elle être sous l'horizon ?
 - b. Orion peut-il être sous l'horizon ?
 4. Régler la carte pour le 1er juin à 20 heures.
 - a. Où est situé le Soleil ?
 - b. Peut-on voir la Grande Ourse ?
 5. a. À quelle heure se lève le Soleil le 1er juin ?
b. À quelle heure se lève-t-il le 1er décembre ?
 6. Dans quelle constellation est le Soleil le 1er juillet ?

Réponses aux questions

1. a. Arcturus est bien au sud, l'Épi est au sud légèrement ouest (il est 22 heures en heure solaire mais approximativement minuit à la montre).
b. L'Aigle est à l'est, il vient de se lever.
c. Cassiopée est au nord.
2. a. En février.
b. Non, car le Soleil (celui qui est marqué 1/06) est juste à côté, dans la constellation du Taureau. Quand Orion est levé, le Soleil l'est aussi, il fait jour et on ne peut pas voir les étoiles.
3. a. Non, la Grande Ourse est toujours visible la nuit. On dit qu'elle est circumpolaire.
b. Oui. En septembre par exemple, Orion est sous l'horizon le soir et visible le matin.
4. a. Le Soleil (marqué 1/06) est à l'horizon nord-ouest. Il vient de se coucher. Il est 20 h au Soleil mais approximativement 22 h sur la montre.
b. Non, car il fait encore jour, le Soleil vient à peine de se coucher !
5. a. Environ 4 h du matin (6 h à sa montre). On tourne la carte jusqu'à ce que le Soleil du 1er juin se trouve à l'horizon côté est. On lit ensuite l'heure en face de la date du 1er juin.
b. Un peu avant 8 h en heure solaire.
6. Dans la constellation des Gémeaux. Pour les astrologues, il est dans le signe du Cancer. Le ciel des astrologues, fixé il y a 2000 ans, ne correspond plus aux positions des étoiles.

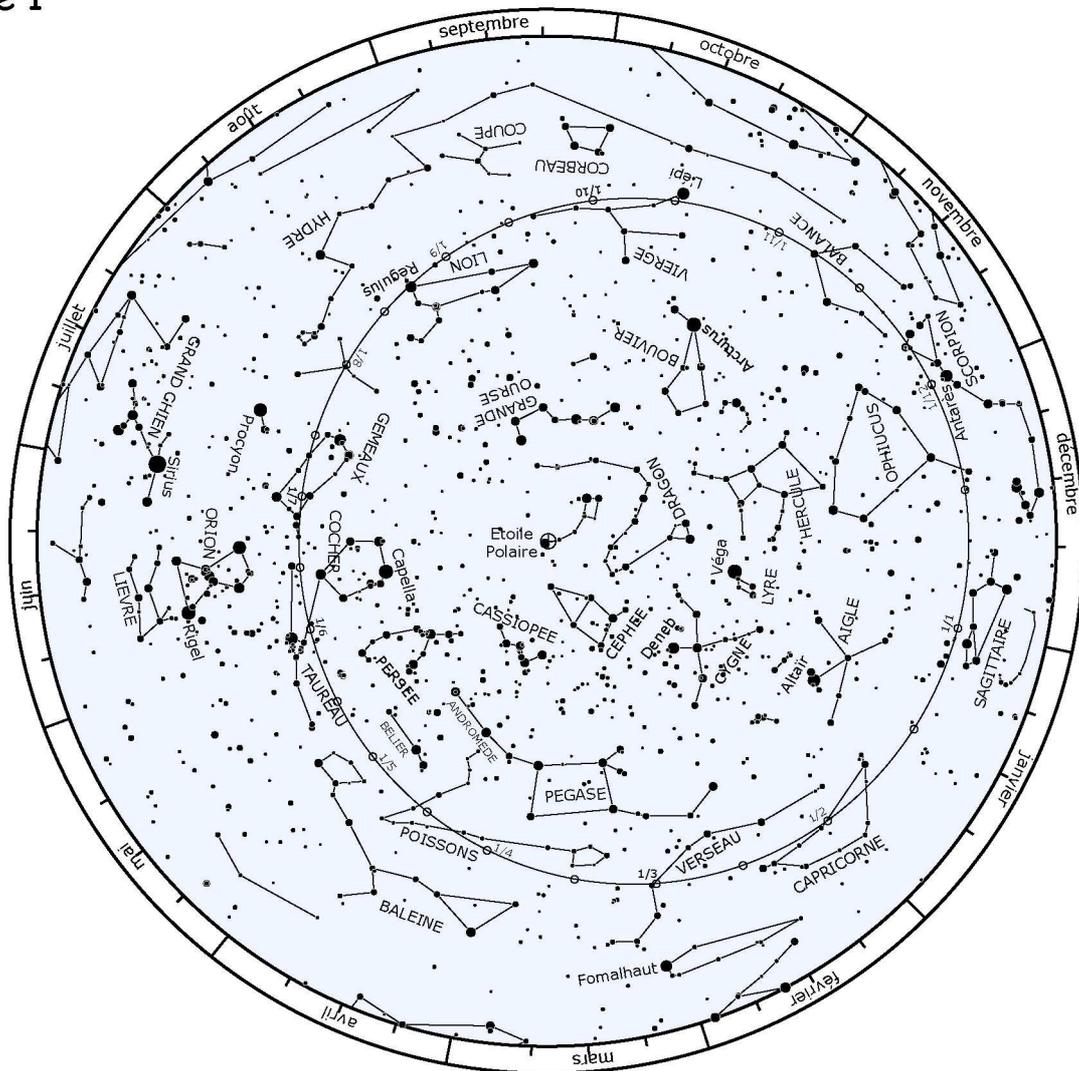
Bonnes observations !

Pierre Causeret

Des cartes seront téléchargeables à partir du site du CLEA. Voir sommaire du CC n° 125

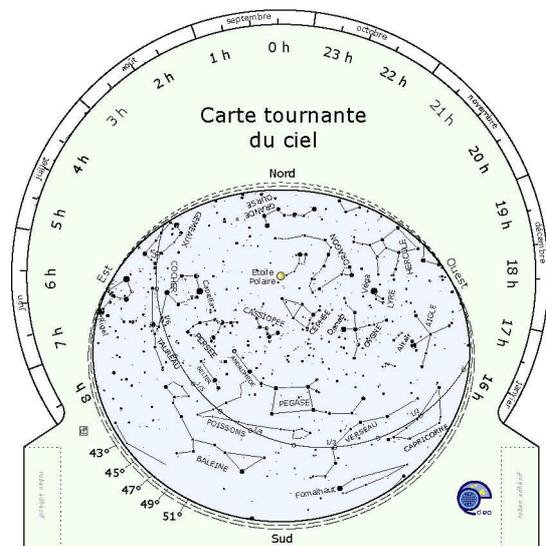
Carte tournante du ciel

Partie 1

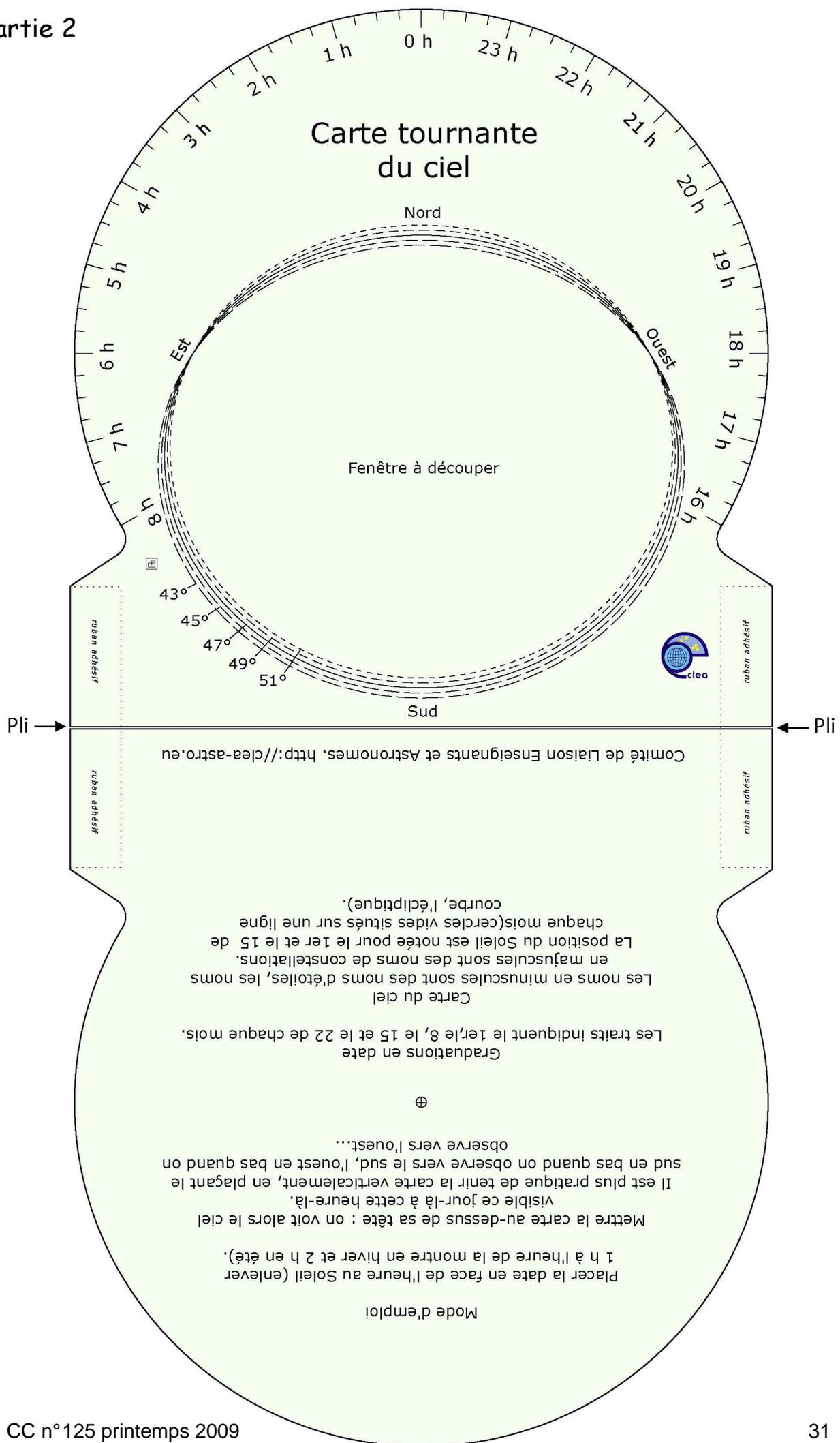


Construction

1. Découper la carte du ciel (partie 1) et percer le centre à l'emplacement de la croix (à proximité de l'étoile Polaire).
2. Découper la partie 2. Découper soigneusement la fenêtre en suivant le trait correspondant à votre latitude.
3. Marquer le pli à l'aide d'une règle et d'un couteau par exemple.
4. Percer au niveau de la croix (au milieu du texte).
5. A l'aide d'une attache parisienne ou d'un bouton pression, fixer la carte sur la partie 2.
6. Ajouter du ruban adhésif pour maintenir ensemble les deux motifs de la partie 2 sans empêcher la carte de tourner.



La carte terminée



Compléments

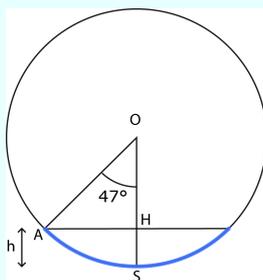
Calcul du pourcentage de la partie visible de la sphère céleste à une latitude de 47°

La surface d'une calotte sphérique est donnée par la formule $2\pi Rh$ (où h est la flèche de la calotte).

En prenant 1 comme rayon de la sphère :

$$OH = \cos 47^\circ$$

$$HS = 1 - \cos 47^\circ$$



Aire de la partie non visible de la sphère céleste (en bleu) : $A_1 = 2\pi h = 2\pi(1 - \cos 47^\circ)$

Aire de la partie visible (l'aire de la sphère est 4π) :

$$4\pi - A_1 = 2\pi(1 + \cos 47^\circ)$$

En fraction de la sphère céleste (on divise par 4π) :

$$\frac{1 + \cos 47^\circ}{2} \text{ soit } 0,84 \text{ ou } 84\%$$

Formule de la projection stéréographique

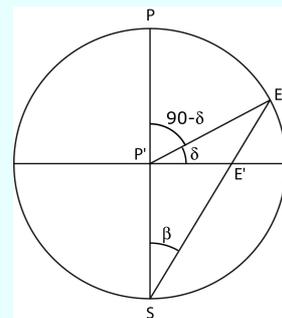
La relation angle inscrit / angle au centre donne :

$$\beta = \frac{90 - \delta}{2} = 45 - \frac{\delta}{2}$$

et comme $\tan \beta = \frac{P'E'}{r_e}$,

on obtient :

$$P'E' = r_e \tan\left(45 - \frac{\delta}{2}\right)$$



Formule de la projection équidistante

La proportionnalité entre le rayon et le complémentaire de la déclinaison s'écrit :

$$\frac{r}{90 - \delta} = \frac{r_e}{90} \text{ ce qui donne } r = r_e \times \left(1 - \frac{\delta}{90}\right)$$